

## 6 Analisi dello stato stazionario

L'equazione differenziale parziale che governa il fenomeno stazionario per un acquifero confinato nel piano orizzontale  $(x,y)$  è:

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q = 0 \quad (198)$$

dove  $\phi$  è il potenziale del fluido o prevalenza totale misurata dal fondo dell'acquifero,  $k_x$  e  $k_y$  sono i coefficienti di permeabilità nella direzione  $x$  e  $y$ , e  $Q$  è il valore della portata di ricarica. Il pompaggio fornisce un valore negativo di  $Q$ .

Il carico totale  $\phi$  del fluido in un punto è dato dalla seguente espressione:

$$\phi = y + \frac{p}{\gamma} \quad (198.1)$$

Dove  $y$  è la quota del punto considerato,  $p$  è la pressione del fluido e  $\gamma$  il peso di volume del fluido considerato.

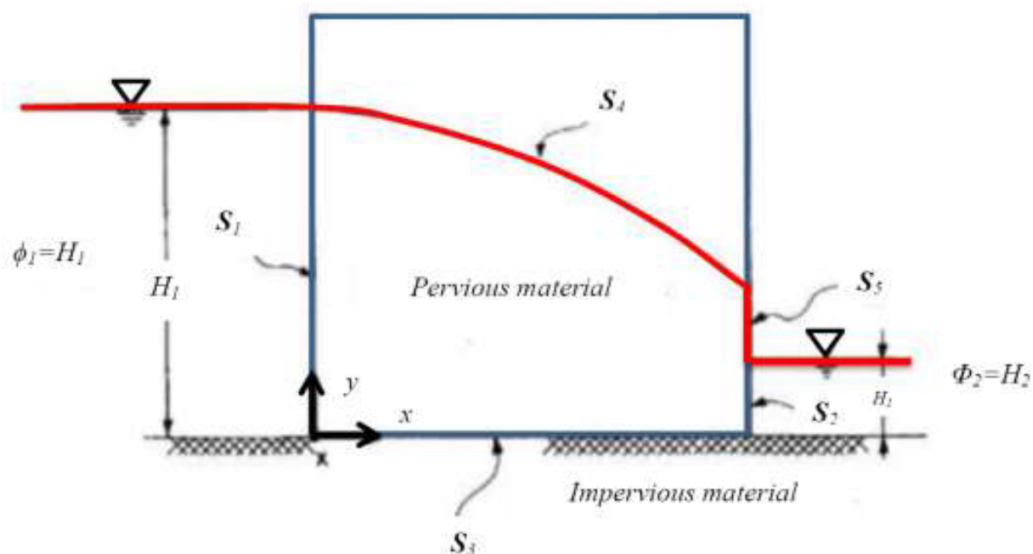


Figura (a)-Flusso non confinato, analisi stato stazionario. Condizioni al contorno.

In un problema di flusso stazionario come rappresentato in figura (a) l'esatta posizione e localizzazione dei contorni  $S_4$  e  $S_5$  non sono note,

anche se si conoscono le condizioni al contorno. La superficie  $S_4$  è caratterizzata da pressione nei pori nulla lungo la superficie e prevalenza totale uguale alla quota  $y$ .

Le condizioni al contorno sono:

- per le superfici a monte e a valle:

$$\phi = \phi_1 \text{ su } S_1$$

$$\phi = \phi_2 \text{ su } S_2$$

- per la superficie di base impermeabile  $S_3$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

dove  $n$  è la normale alla superficie;

- per la superficie libera  $S_4$

$$\begin{cases} \phi = y \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

- per la superficie libera  $S_4$

$$\phi = y \text{ su } S_4$$

Il processo di discretizzazione ad elementi finiti riduce l'equazione differenziale (198) in un insieme di equazioni di equilibrio nella forma:

$$\mathbf{k}_c \Phi = \mathbf{q} \quad (199)$$

dove  $\mathbf{k}_c$  è la matrice simmetrica di permeabilità,  $\Phi$  è il vettore nodale del potenziale (carico totale), e  $\mathbf{q}$  è un vettore nodale afflussi/deflussi.

Gli elementi della matrice sono calcolati utilizzando l'Equazione 200:

$$\mathbf{k}_c = \iint \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \, dx dy \quad (200)$$

assumendo che gli assi principali del tensore di permeabilità coincidano con gli assi  $x$  ed  $y$ .

La matrice  $\mathbf{K}$  è data da:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (201)$$

mentre la matrice  $\mathbf{T}$ , data dall'Equazione 202, è la matrice di interpolazione del gradiente potenziale totale dell'elemento: assume lo stesso significato della matrice  $\mathbf{B}$  deformazione-spostamento.

Ad esempio per un elemento quadrilatero a 4 nodi, la matrice  $\mathbf{T}$  è data da:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (202)$$

Per imporre le prevalenze totali assegnate sui bordi si aggiungono coefficienti di permeabilità elevati agli elementi diagonali di  $\mathbf{K}_c$  corrispondenti ai nodi al contorno, e si specificano le condizioni di flusso che risultano dai potenziali totali dati. Quindi l'equazione (199) viene modificata per ottenere:

$$(\mathbf{k}_c + \mathbf{k}^b)\Phi = \mathbf{Q}^b \quad (199.1)$$

dove  $\mathbf{k}^b$  è una matrice diagonale, l'elemento  $i$ -esimo della diagonale è uguale a zero se il carico  $\phi_i$  non è assegnato, altrimenti è uguale a  $k$ , dove  $k \gg k_{ij}$  (di solito si assegna un grande valore di penalità in GFAS nel pannello *Analisi flusso in regime stazionario*). Conseguentemente, l' $i$ -esimo elemento del vettore  $\mathbf{Q}$  è uguale a zero se  $\phi_i$  non è specificato, altrimenti è uguale a  $k\phi_i$ .

La soluzione al problema delle infiltrazioni potrebbe essere ottenuta subito se fosse nota la superficie libera  $S_4$ . Verrebbe effettuata la discretizzazione ad elementi finiti del dominio entro i confini  $S_i$  ( $i=1\dots 5$ ), e i potenziali totali incogniti nei punti nodali potrebbero essere risolti utilizzando l'equazione (199.1). Tuttavia, con la posizione  $S_4$  sconosciuta, è pratica comune assumere una superficie libera, risolvere

l'equazione (199.1) con non tutte le condizioni al contorno imposte, controllare se tutte le condizioni al contorno sono soddisfatte e iterare con la superficie libera  $S_4$  fino a quando non è stata trovata una soluzione che soddisfa tutte le condizioni al contorno. Il requisito di base nella soluzione di iterazione della mesh ad elementi finiti di cui sopra è che non ci deve essere flusso al di sopra della linea  $\phi=y$ . Per la risoluzione del problema viene eseguita una discretizzazione ad elementi fini in cui la permeabilità è considerata:

a)  $k$ , per  $\phi \geq y$

b)  $0$ , per  $\phi < y$

La permeabilità del materiale di cui sopra corrisponde ad una permeabilità non lineare che viene trattata in due modi differenti: 1) *Nonlinear air element* e 2) *True air elements*.

Nel caso 1) la permeabilità è impostata ad un valore molto basso per gli elementi che si trovano sopra la superficie freatica e per tutti i nodi dell'elemento.

Nel caso 2) la permeabilità è imposta a zero per gli elementi che si trovano sopra la superficie freatica e per tutti i nodi dell'elemento.

## 6.1 Metodo di analisi in GFAS

La procedura implementata in GFAS per la soluzione dei problemi di infiltrazioni a superficie libera è riassunta come segue:

1. Generazione della mesh per l'intero dominio sottoposto all'analisi delle infiltrazioni (**il modello geometrico va generato considerando le coordinate dei punti all'interno del quadrante positivo del sistema di riferimento XY**).

2. Determinazione del profilo della matrice di rigidità per l'intera mesh, ovvero, si suppone che il "*True air element*" (procedura 2) o "*Nonlinear air element*" (procedura 1) sia presente nella mesh per tutte le fasi dell'analisi.

3. Valutazione della matrice di rigidità del sistema, introduzione delle condizioni al contorno prescritte e risoluzione l'Eq. (199.1) per il carico totale nodale.

4. Se un elemento verificato si trova totalmente al di sopra della superficie libera, considerando tutti i suoi nodi, verrà contrassegnato come "*True air element*" o "*Nonlinear air element*" e verrà trascurato in tutti i calcoli successivi. Qualsiasi elemento che è al di sotto, o parzialmente al di sotto, della superficie libera durante l'iterazione non sarà cancellato dall'analisi.
5. Determinazione della nuova matrice di rigidità del sistema con il profilo dello skyline originale come determinato nel passaggio 2. I "*True air element*" non entreranno in alcun calcolo. Verranno considerati gli "*Nonlinear air element*" ma con un basso valore di permeabilità.
6. Riesecuzione dei passaggi da 5 a 6 fino a quando non vengono più generati "nodi aerei" o "elementi non lineari" dall'iterazione.
7. Se esiste una superficie libera esterna che è data da  $S_5$  in Fig. (a), la posizione sconosciuta della superficie libera può essere trovata trasformando gradualmente i nodi esterni in nodi con carico assegnato dal livello più basso al più alto e ripetendo i passaggi da 5 a 7 .
8. La convergenza si ottiene se non vi è alcun elemento aria generato durante l'iterazione e tutti i nodi della superficie libera esterna soddisfano le condizioni al contorno.
9. La posizione precisa della superficie libera e delle linee equipotenziali può essere determinata mediante un processo di interpolazione.

## 6.2 Esempio di calcolo

Consideriamo una argine in terra di forma trapezia di materiale relativamente impermeabile rappresentato in figura (b):

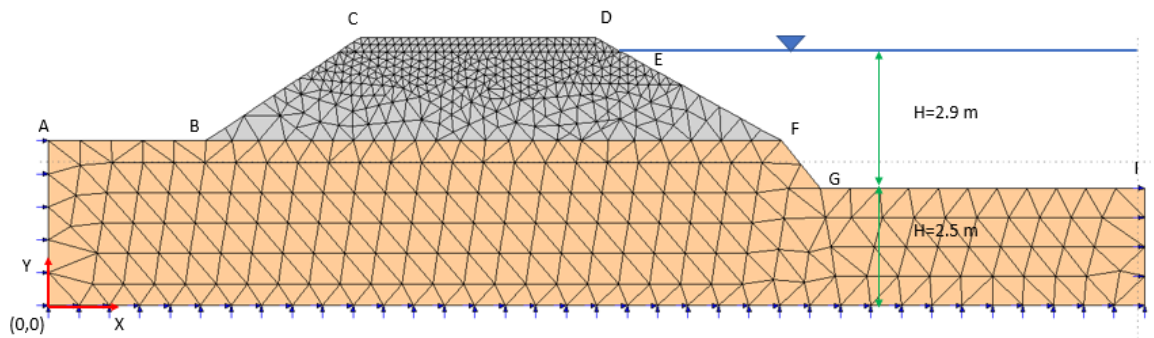


Figura (b) - modello geometrico

Ai fini della progettazione è richiesto che la linea freatica rimanga all'interno del corpo arginale e che non si abbia un battente idraulico a valle sul tratto AB. Il livello di acqua a monte è fissato a 2,9 m pertanto il carico totale  $\phi$  sui nodi posti nei tratti EFGI e sui bordi è pari alla somma della quota e del livello di acqua per un totale di 5,4 m (Figura c).

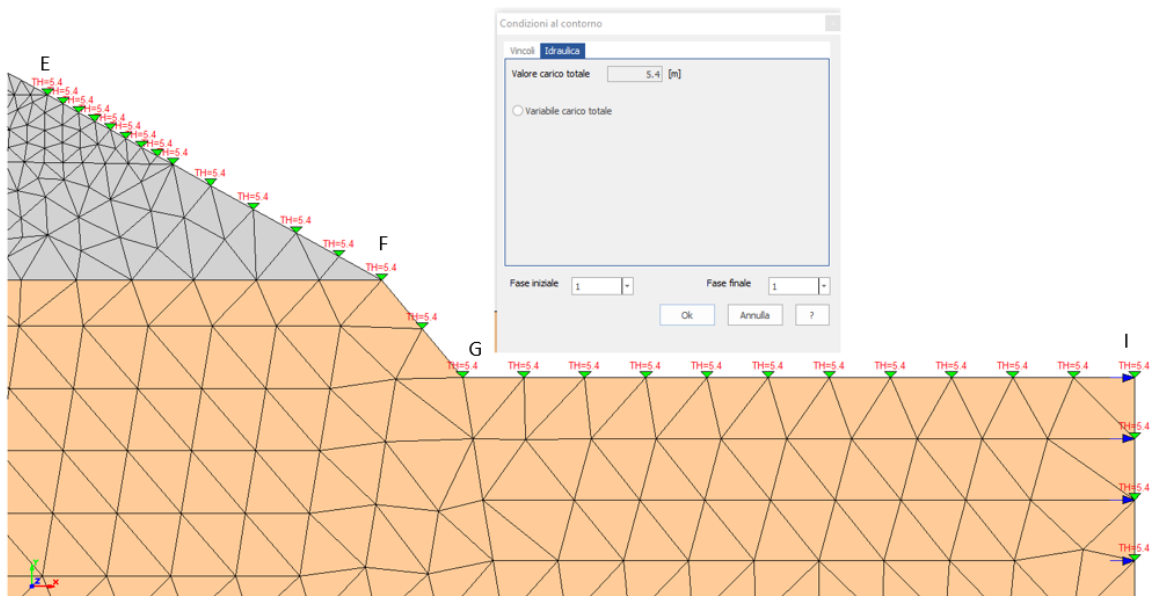


Figura (c) - carico idraulico a monte

Il resto dei nodi a valle e in sommità hanno un carico che è pari solo alla loro quota in quanto per essi non vogliamo un carico idraulico (Figura d). Per questi nodi viene assegnato un carico idraulico variabile che il software definisce in automatico in fase alle quote del modello geometrico. Con questa assegnazione ammettiamo la possibilità che si possa formare una superficie freatica a valle, dato che non conosciamo l'esatta posizione della linea di saturazione.

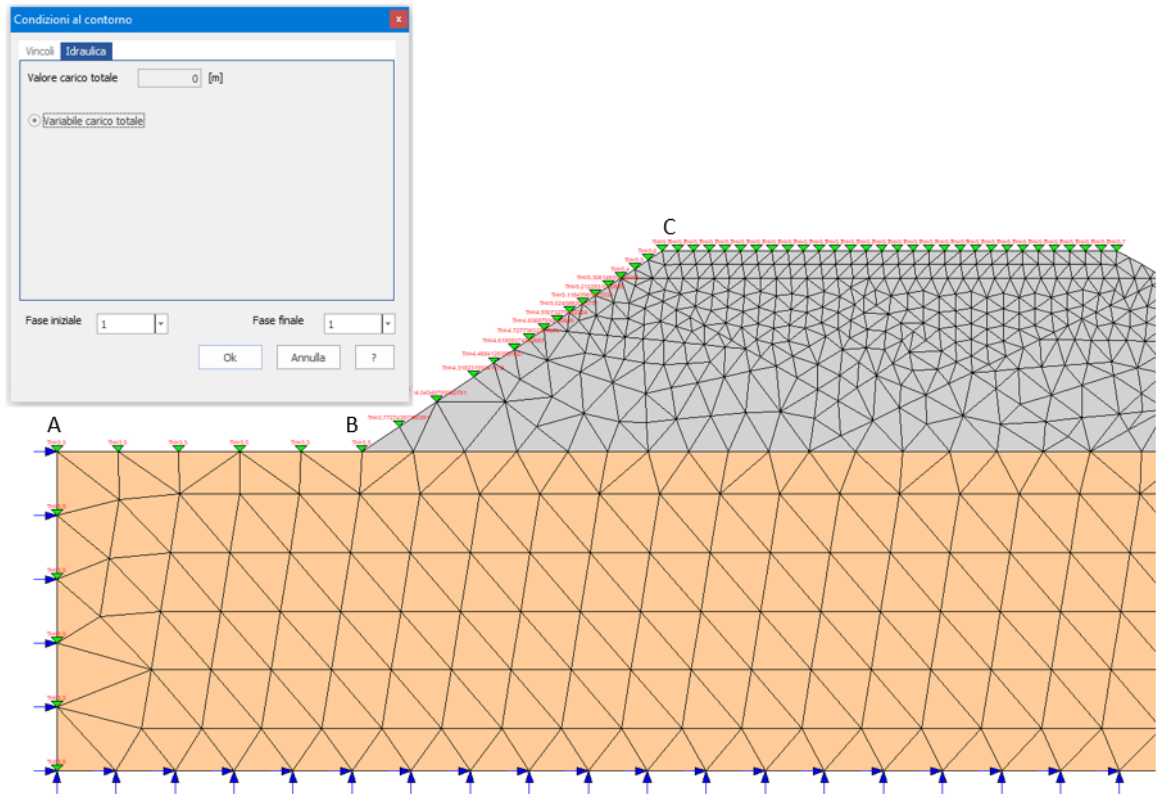


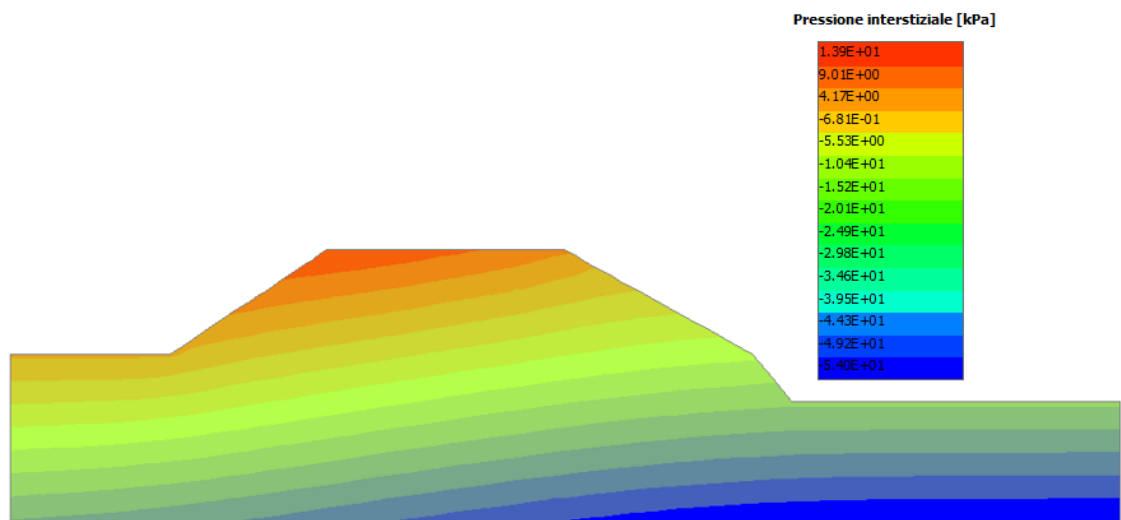
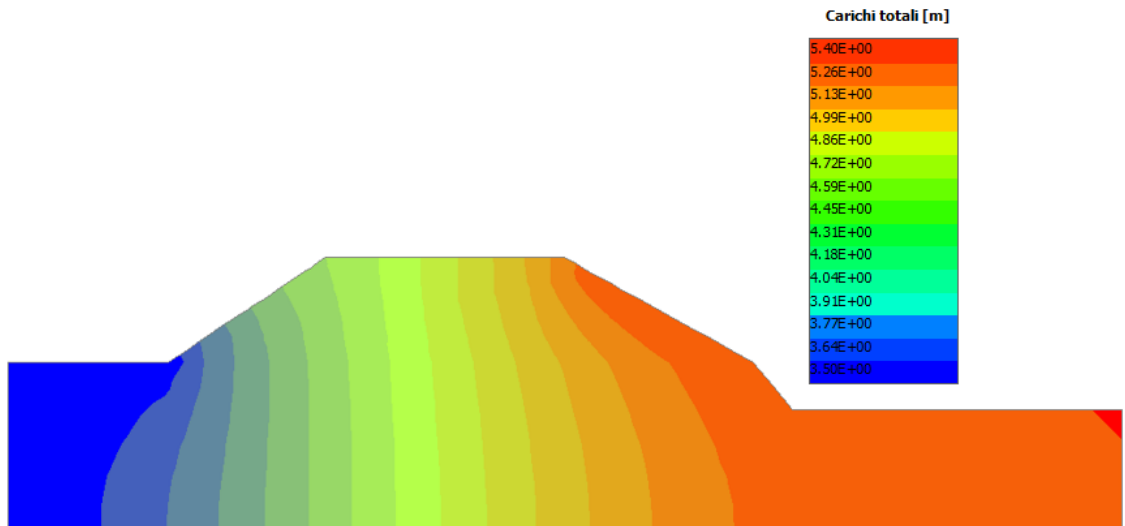
Figura (d) - carico idraulico a valle e in sommità

I parametri idraulici di ogni materiale vanno assegnati in Caratteristiche materiale - Proprietà idrauliche.

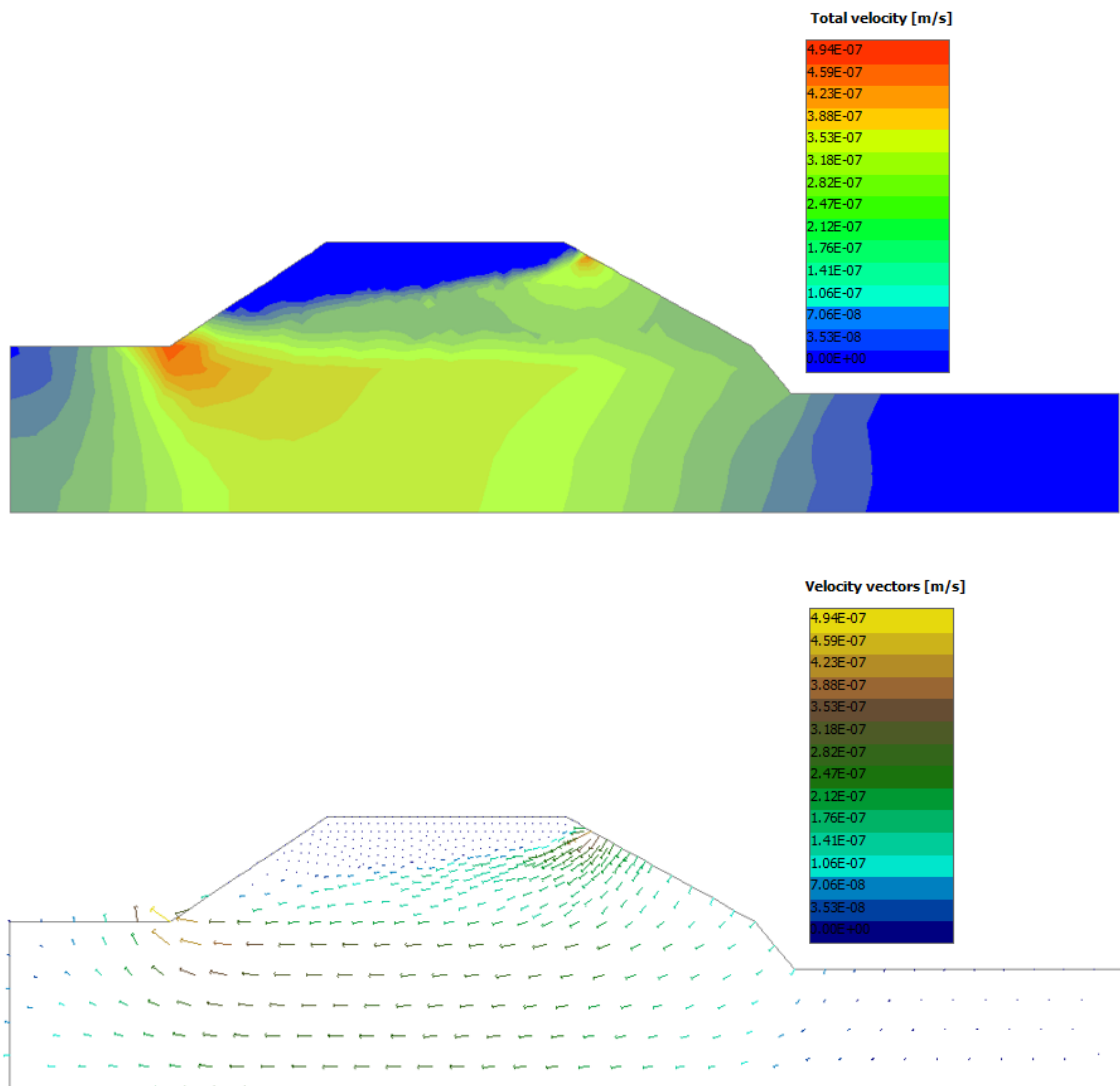
L'analisi viene avviata dal pannello ANALISI, scegliendo il comando *Analisi con falda* e *Analisi filtrazione*. Nella finestra verrà richiesto di scegliere l'opzione "True air element" (procedura 2) o "Nonlinear air element" (procedura 1).

I risultati di calcolo sono visualizzati nel pannello RISULTATI - Plot risultati.

I risultati sono presentati graficamente in termini di Prevalenze totali, Pressioni neutre, Prevalenze di pressione, Velocità totale e Vettori di velocità.







I vettori velocità sono indicatori delle linee di flusso, infatti essi sono tangenti a queste. Linee di flusso e linee equipotenziali (prevalenza totale) si intersecano perpendicolarmente.

Infine per visualizzare la superficie libera dell'acqua all'interno del corpo filtrante, occorre scegliere su Pannello Plot la Visualizzazione proprietà e scegliere Isolinee-Zero level value

